

Quantizações em larga escala para a descrição de órbitas planetárias em uma abordagem independente da massa dos corpos celestes



Objetivos:

Formulações matemáticas que são empregadas na teoria quântica para o problema atômico podem ser relevantes para tratar alguns aspectos que envolvem o problema das órbitas planetárias. Para o caso do sistema solar será mostrado que os raios médios planetários e períodos de revolução podem ser determinados a partir de um único parâmetro dado pela distância média entre o planeta Mercúrio e o sol, em uma abordagem independente das massas dos corpos envolvidas neste sistema. Ao tratar sistemas binários de estrelas a formulação da teoria quântica para o problema molecular poderá igualmente fornecer resultados de significativa importância.

Primórdios: a melodia do Cosmos

O imenso avanço no conhecimento voltado ao estudo dos sistemas atômicos tem proporcionado à humanidade o usufruto de inúmeras descobertas, principalmente aquelas relacionadas ao desenvolvimento, em passos largos, das revolucionárias tecnologias da informática e da nanotecnologia. No entanto, os princípios que regem o universo do átomo, ou seja, do “infinitamente pequeno”, tiveram suas origens nos primórdios do pensamento sobre a regência da matemática no funcionamento da Natureza. Este pensamento surgiu com Pitágoras e sua Escola na Grécia antiga, a partir de uma poética inferência ao universo do “infinitamente grande”, em tentativas de encontrar relações matemáticas, as quais pudessem descrever fenômenos naturais. A primeira destas tentativas consistiu em estabelecer uma relação entre proporções numéricas simples e intervalos musicais. Assim, razões entre pequenos números inteiros foram empregadas de maneira eficaz para construir a escala musical produzida por um instrumento de cordas. Os Pitagóricos, posteriormente, deram um salto fundamental, na medida em que adotaram esta noção, estendendo as ideias sobre a harmonia musical ao movimento dos planetas: as mesmas razões empregadas entre os números inteiros que regem as notas musicais poderiam de modo similar

governar as distâncias entre os planetas. Assim sendo, na cosmologia Pitagórica da Grécia antiga, em um sistema geocêntrico, o Sol e os planetas, cada um em sua própria órbita, poderia ser descritos como um instrumento musical gerando um melodioso conjunto de sons divinos expressos pela harmonia das esferas celestiais.

Em 1618, mais de 2000 depois, o astrônomo alemão Johannes Kleper ressuscitou esta idéia de Pitágoras sobre a harmonia das esferas celestiais em seu livro “Harmonici Mundi” (A Harmonia do Mundo). Combinando as velocidades orbitais dos diferentes planetas em um sistema heliocêntrico, o astrônomo inferiu que as razões entre estas velocidades poderiam ser comparadas às razões entre os números inteiros obtidas nas escalas musicais.

Distâncias Planetárias & Números Inteiros

O emprego da numerologia sempre exerceu fascínio e despertou grande curiosidade entre os astrônomos no ensejo de estimar as distâncias dos planetas ao Sol. Na realidade, os números inteiros desempenharam importante papel na descoberta dos planetas Urano (em 1781), Netuno (1846), do Cinturão de Asteróides (1801) entre os planetas Marte e Júpiter e do asteróide Quiron (1978) entre os planetas Saturno e Urano.

Consideremos inicialmente a lei empírica de Titius-Bode, estabelecida em 1778 para estimar as distâncias planetárias:

$$D = 0.4 + (0.3) \times 2^n \text{ UA},$$

D designando a distância para o n -ésimo planeta e uma Unidade Astronômica (UA) sendo igual à distância do planeta Terra ao Sol. Para Mercúrio devemos tomar $D = 0.4$ resultando assim para Vênus ($n = 0$), $D = 0.7$; para a Terra ($n = 1$), $D = 1.0$; para Marte ($n = 2$), $D = 1.6$ e assim por diante como mostrado na **Tabela I**.

Tabela I – Ilustração da Lei de Titus-Bode

<i>Planetas</i>	<i>Distância Calculada (UA)</i>	<i>Distância Observada (UA)</i>
<i>Mercúrio</i>	<i>0.4</i>	<i>0.3</i>

<i>Vênus</i>	$0.4 + 0.3 \times 1 = 0.7$	0.7
<i>Terra</i>	$0.4 + 0.3 \times 2 = 1.0$	1.0
<i>Marte</i>	$0.4 + 0.3 \times 4 = 1.6$	1.5
—	$0.4 + 0.3 \times 8 = 2.8$	-
<i>Júpiter</i>	$0.4 + 0.3 \times 16 = 5.2$	5.2
<i>Saturno</i>	$0.4 + 0.3 \times 32 = 10.0$	9.6
<i>Urano</i>	$0.4 + 0.3 \times 64 = 19.6$	19.2
<i>Netuno</i>	$0.4 + 0.3 \times 128 = 38.8$	30.1
<i>Plutão</i>	$0.4 + 0.3 \times 256 = 77.2$	39.5

Pela **Tabela I** podemos observar que a relação empírica dada pela lei de Titius-Bode fornece distâncias precisas para os planetas interiores, mas começa a se mostrar imprecisa para Saturno, Urano e Netuno, não conseguindo prever a órbita de Plutão.

Vale a pena ressaltar que quando tal lei foi enunciada em 1778, não se conhecia nenhum planeta além de Saturno. A descoberta de Urano em 1781, cuja distância em relação ao Sol prevista empiricamente estava razoável de acordo com sua distância real, suscitou entre os astrônomos indagações com respeito à lacuna correspondente ao algarismo 2,8 como apresentado na **Tabela I**. Porque assim, talvez pudesse existir um novo planeta de pequeno tamanho localizado nesta posição em relação ao Sol ainda não descoberto na época. E, de fato, no período compreendido entre 1801 a 1807, ficou demonstrada a existência destes “pequenos “planetas”, os quais foram posteriormente chamados de asteróides, a distâncias médias de 2,8 Unidades Astronômicas (UA), como indicadas pela lei de Titius- Bode.

Por sua vez, o asteróide Quiron foi previsto pelo astrônomo italiano Giuseppe Armellini que ao formular uma nova lei empírica em 1922 indicava a existência de um planeta justamente entre Saturno e Urano. Em 1978 o astrônomo norte-americano Charles T. Kowal descobriu o asteróide Quiron a uma distância ao Sol como aquela prevista a partir da lei empírica de Armellini expressa pela seguinte relação matemática:

$$D = 1.53^n,$$

onde D (em UA), a distância média dos planetas ao Sol é dada em função dos valores de n que variam de $n = -2$ para Mercúrio; $n = -1$ para Vênus; $n = 0$ para a Terra; $n = 1$ para Marte e assim por diante como mostrado na **Tabela II**:

Tabela II – Ilustração da Lei de Armellini

<i>Planetas</i>	$D=1.53^n$	<i>Distâncias Calculadas</i>	<i>Distâncias Observadas</i>
<i>Mercúrio</i>	1.53^{-2}	0.43	0.39
<i>Vênus</i>	1.53^{-1}	0.65	0.72
<i>Terra</i>	1.53^0	1.00	1.00
<i>Marte</i>	1.53^1	1.53	1.52
<i>Vesta</i>	1.53^2	2.34	2.36
<i>Camilla</i>	1.53^3	3.58	3.48
<i>Júpiter</i>	1.53^4	5.48	5.20
<i>Saturno</i>	1.53^5	8.38	9.55
<i>Quiron</i>	1.53^6	12.83	13.87
<i>Urano</i>	1.53^7	19.63	19.20
<i>Netuno</i>	1.53^8	30.03	30.11
<i>Plutão</i>	1.53^9	45.94	39.52

Os asteróides Vesta e Camilla são representados na **Tabela II** como os limites do anel de cerca de dois mil asteróides, cuja existência entre Marte e Júpiter foi prevista em 1766 pela lei de Titius-Bode. De maneira análoga, a lei de Armellini, além de contemplar as distâncias dos planetas e de asteróides conhecidos, previu a existência de outro asteróide que poderia estar situado entre Saturno e Urano. No entanto, esta lei mostrou-se insatisfatória para determinar a distância observada para o planeta Plutão.

Objetivos da presente investigação: Abordagens baseadas na teoria quântica para a descrição de órbitas planetárias

1 – O modelo atômico de Bohr e o sistema solar [1].

Será mostrado, de modo análogo ao procedimento adotado por Niels Bohr para descrever as possíveis órbitas do único elétron em torno do núcleo do átomo de hidrogênio, que é possível combinar as relações matemáticas que regem a segunda lei

de Newton para o movimento orbital dos planetas com a relação matemática que expressa a regra de quantização de Bohr para obter uma expressão para as distâncias médias planetárias ao centro do Sol. Essa expressão permite que se infira o seguinte princípio: *De modo geral, a razão entre as distâncias médias planetárias deverá obedecer à razão entre o quadrado dos números inteiros a elas associados e para os períodos, a razão entre os cubos destes mesmos números inteiros.*

2 – Uma equação similar a de Schrödinger para a descrição de órbitas do sistema solar e de sistemas extra – solares [2-8]

Ao rebuscarem-se as ideias de outro físico que foi fundamental à criação do campo da Mecânica Quântica – Erwin Schrödinger –, utilizando uma equação similar a que ele postulou para estudar o universo dos mundos atômicos e subatômicos, foi empregado na presente abordagem esta equação para descrever o sistema solar em um plano envolvendo um campo atrativo situado no centro do sistema associado a um corpo de massa M , permitindo nestes estudos observar os seguintes conjuntos de resultados:

- raios médios planetários para todos os planetas Terrestres (Mercúrio, Vênus, Terra e Marte).
- raios médios planetários para todos os planetas Jovianos (Jupiter, Saturno, Urano e Netuno).
- raios médios planetários para os planetas anões – Plutão- e aqueles recentemente descobertos (Makemake, Haumea e Eris).
- raios médios para as principais regiões de probabilidade de encontrar corpos no Cinturão de Asteroides Hungarian e o Cinturão Principal de Asteróides.
- raios médios para todos os asteroides Centauros e a maioria dos corpos celestes trans-Netunianos.

3 – Método do orbital molecular aplicado ao tratamento de um sistema extra-solar de estrelas binárias [7-8].

Foi utilizada uma abordagem similar àquela utilizada para o cálculo das distâncias de equilíbrio em sistemas moleculares diatômicos para estimar as distâncias médias de separação entre estrelas binárias no sistema extra-solar HD188753 Cygni . Com base nas funções de ondas tridimensionais, com descrição matemática similar às funções de onda que descrevem o orbital atômico 1_s para o átomo de hidrogênio, e tomando $a_0 = 0.387$ UA, i.e, o raio médio planetário de Mercúrio, o método variacional prevê uma “distância de equilíbrio” para as duas estrelas de aproximadamente 1.0 UA. Este resultado se compara com a separação observada de 0.66 UA.

Observações recentes foram feitas para investigar a geometria de formação de discos protoplanetários em torno de estrelas binárias e permitiram descrever a formação de discos de detritos circumbinários e circumestelares em torno destes sistemas. Empregando um modelo da mecânica quântica molecular para a descrição da distribuição da nuvem eletrônica para o sistema molecular H_2^+ resultados mostram que a descrição das geometrias de formação de discos protoplanetários em função da distância de separação entre as estrelas binárias é análoga a distribuição da nuvem eletrônica em torno dos dois prótons do íon molecular H_2^+ em função de suas distâncias de separação.

1. Aplicação do modelo de Bohr para o Sistema Solar

Este modelo, que foi aplicado com sucesso ao átomo de hidrogênio, consistia de um núcleo com uma carga positiva e um elétron com carga negativa girando em torno deste núcleo em órbitas circulares, de modo análogo a um sistema solar em miniatura, onde somente certas órbitas seriam permitidas. A natureza intrinsecamente descontínua do mundo atômico foi imposta pela condição que uma grandeza física associada ao movimento do elétron em órbita designada de momento angular (L) do elétron (o produto de sua massa m pela sua velocidade orbital v e pela sua distância r ao núcleo atômico) fosse descrita por *múltiplos de número inteiros* n da constante de Planck h ou “*Quantum de Ação*” dividido pelo fator dois multiplicado pelo número π

$$L = n \frac{h}{2\pi}, \quad \text{onde } n = 1, 2, 3, \dots;$$

designada regra de quantização de Bohr.

Cada órbita do elétron em torno do núcleo do átomo de hidrogênio, no contexto do modelo de Bohr, é então rotulada pelo número inteiro n , iniciando com $n=1$ que caracteriza o estado fundamental deste átomo, ou seja, a unidade é associada à primeira órbita permitida, a mais próxima da região nuclear.

Para o sistema solar dado que a intensidade da força gravitacional e centrípeta são iguais:

$$m_p v^2 / r = GM_s m_p / r^2$$

De acôrdo com o princípio da dualidade onda-corpúsculo de De Broglie:

$$\lambda = g^* / p = g^* / m_p v$$

λ corresponde ao comprimento de onda associado ao momento linear p de cada planeta e g^* é uma constante equivalente à constante de Planck.

Assumindo órbitas circulares para os planetas a condição de ondas estacionárias é dada por:

$$2\pi r = n\lambda \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Estas duas últimas equações mostram que para cada órbita a intensidade do momento angular pode ser escrita como:

$$L = m_p v r = n g^* / 2\pi$$

que é análoga à condição semi-clássica imposta por Bohr para a quantização do momento angular ($L = nh/2\pi$).

O conjunto das equações acima mostra que:

$$r = (n^2 g^{*2}) / (4\pi^2 G M_s m_p^2)$$

e a velocidade orbital dada por:

$$v = 2\pi G M_s m_p / n g^*$$

O período de revolução $T = 2\pi r / v$ para cada planeta pode então ser determinado:

$$T = n^3 [(g^{*3}) / (4\pi G M_s^2 m_p^2)]$$

A segunda e terceira leis de Kepler para as órbitas planetárias podem ser facilmente verificadas a partir das equações para r e T .

Se n_i e n_j são números correspondendo à duas órbitas quaisquer i e j , respectivamente, então:

$$r_i = (n_i^2 g^{*2}) / (4\pi^2 G M_s m_p^2)$$

e

$$r_j = (n_j^2 g^{*2}) / (4\pi^2 G M_s m_p^2)$$

ou seja,

$$r_i/r_j = n_i^2/n_j^2$$

Para os períodos T

$$T_i = n_i^3 [(g^{*3}) / (4\pi GM_s^2 m_p^2)]$$

e

$$T_j = n_j^3 [(g^{*3}) / (4\pi GM_s^2 m_p^2)]$$

ou seja,

$$T_i/T_j = n_i^3/n_j^3$$

As razões entre os raios e períodos como dadas acima sugerem o seguinte princípio:

A razão entre as distâncias médias planetárias obedece a razão entre o quadrado dos inteiros associados à suas respectivas órbitas, e para os períodos, a razão entre os cubos destes mesmos inteiros.

Temos então as seguintes expressões de recorrência para as órbitas planetárias:

$$r_{i+1} = r_i [(n_{i+1}) / (n_i)]^2$$

e

$$T_{i+1} = T_i [(n_{i+1}) / (n_i)]^3$$

Tabela III. Raios médios planetários e períodos calculados diretamente das expressões de recorrência.

n	$r_{i+1} = r_i [(n_{i+1}) / (n_i)]^2$	$T_{i+1} = T_i [(n_{i+1}) / (n_i)]^3$
1	$r_1 = 0.387$	$T_1 = 0.241$
2	$r_2 = r_1 (2/1)^2 = 1.548$	$T_2 = T_1 (2/1)^3 = 1.928$

3	$r_3=r_2(3/2)^2 = 3.484$	$T_3=T_2(3/2)^3=6.507$
4	$r_4=r_3(4/3)^2 = 6.194$	$T_4=T_3(4/3)^3=15.424$
5	$r_5=r_4(5/4)^2 = 9.678$	$T_5=T_4(5/4)^3=30.125$
6	$r_6=r_5(6/5)^2 = 13.936$	$T_6=T_5(6/5)^3=52.056$
7	$r_7=r_6(7/6)^2 = 18.968$	$T_7=T_6(7/6)^3=82.663$
8	$r_8=r_7(8/7)^2 = 24.774$	$T_8=T_7(8/7)^3=123.392$
9	$r_9=r_8(9/8)^2 = 31.355$	$T_9=T_8(9/8)^3=175.689$
10	$r_{10}=r_9(10/9)^2 = 38.710$	$T_{10}=T_9(10/9)^3=241.0$
11	$r_{11}=r_{10}(11/10)^2 = 46.839$	$T_{11}=T_{10}(11/10)^3=320.771$
12	$r_{12}=r_{11}(12/11)^2 = 55.742$	$T_{12}=T_{11}(12/11)^3=416.448$
13	$r_{13}=r_{12}(13/12)^2 = 65.419$	$T_{13}=T_{12}(13/12)^3=529.447$

Na **Tabela III** pode-se observar que os rádios médios para as órbitas dos planetas Vênus e Terra como também o raio médio associado ao asteroide que descreve a órbita interior do Cinturão de asteroides e do cinturão de asteroides Hungaria não puderam ser verificados.

Um procedimento para o cálculo das distâncias médias das órbitas dos planetas Vênus e Terra e do asteroide associado à órbita interior do Cinturão de asteroides principal e do cinturão Hungaria

Estas órbitas são calculadas empíricamente estabelecendo uma classe de números m , associados com o valor do inteiro n correspondendo a uma dada órbita, variando de zero até n .

Por exemplo: considere $n = 2$ com $m = 0, 1, 2$ e seja dado o par $(n = 2; m = 2)$

As orbitas $(n = 2; m = 1)$ e $(n = 2; m = 0)$ podem ser determinadas através dos seguintes cálculos:

$$r_{2,1} = r_{2,2}[(2^2 + 1^2)/(2^2 + 2^2)] = 0.9677$$

$$r_{2,0} = r_{2,2}[(2^2 + 0^2)/(2^2 + 2^2)] = 0.7742$$

onde

$$r_{2,2} = 1.5484$$

Para os períodos

$$T_{2,1} = T_{2,2}(\sqrt{5/8})^3 = 0.9487$$

e

$$T_{2,0} = T_{2,2}(\sqrt{4/8})^3 = 0.6788,$$

onde

$$T_{2,2} = 1.92$$

Tabela IV. Comparação entre os resultados observados e aqueles calculados pelo modelo.

Posição	Planeta asteroide	/	Raio médio (UA)		Período orbital (anos)	
			Calculado	Observado	Calculado	Observado
n=1;m=1	Mercúrio		0.387	0.387	0.241	0.241
n=2;m=0	Vênus		0.774	0.723	0.682	0.615
n=2;m=1	Terra		0.968	1.0	0.953	1.0
n=2;m=2	Marte		1.548	1.527	1.928	1.881
n=3;m=0	HIL		1.742	1.780	2.30	2.375
n=3;m=1	HOL		1.935	2.0	2.694	2.828
n=3;m=2	Vesta		2.515	2.361	3.994	3.60
n=3;m=3	Camilla		3.483	3.477	6.507	6.502
n=4	Júpiter		6.192	5.203	15.424	11.962
n=5	Saturno		9.675	9.539	30.125	29.458
n=6	Chiron		13.932	13.708	52.056	50.760
n=7	Urano		18.963	19.191	82.663	84.010
n=8	Nessus		24.768	24.655	123.392	122.420

n=9	Netuno	31.347	30.061	175.689	164.790
n=10	Plutão	38.70	39.529	241.0	248.540
n=11	Makemake	46.827	45.428	320.771	306.186
n=12	2004 OJ14	55.728	55.762	416.448	411.277
n=13	Eris	65.403	67.902	529.477	559.531

Se considerarmos para todas as órbitas planetárias a expressão para a o raio médio planetário dado por:

$$r = [(n^2 + m^2)/2]r_0$$

onde $r_0 = 0.387\text{UA}$, ou seja, o raio médio de Mercúrio e $m = n$, com excessão da órbita de Vênus com ($n = 2; m = 0$) e aquela da Terra ($n = 2; m = 1$), que foram obtidas pela órbita de Marte ($n = 2; m = 2$), e aquelas correspondendo ao anel interno ($n = 3; m = 0$) e ao anel externo ($n = 3; m = 1$) do cinturão de asteróides Hungarian e ao anel interno do cinturão principal de asteróides ($n = 3; m = 2$) que foram obtidas a partir da órbita correspondendo ao anel externo deste cinturão ($n = 3; m=3$), então a expressão original para o cálculo das distâncias médias planetárias permanece inalterada e assim os valores para os raios médios planetários podem ser determinados como mostrados na **Tabela V**.

Tabela V. Raios médios planetários calculados pela equação $r = [(n^2 + m^2)/2] r_0$

<i>Position</i>	$r = [(n^2 + m^2)/2]r_0$	<i>Mean distance in AU</i>	<i>Planet / Asteroid</i>
$n=1; m=1$	$r_1 = r_0 = 0.387$	0.387	Mercúrio
$n=2; m=0$	$r_2 = [(2^2 + 0^2)/2]r_0$	0.774	Venus
$n=2; m=1$	$r_3 = [(2^2 + 1^2)/2]r_0$	0.967	Terra
$N=2; m=2$	$r_4 = [(2^2 + 2^2)/2]r_0$	1.548	Marte
$n=3; m=0$	$r_5 = [(3^2 + 0^2)/2]r_0$	1.741	HIL
$n=3; m=1$	$r_6 = [(3^2 + 1^2)/2]r_0$	1.935	HOL
$n=3; m=2$	$r_7 = [(3^2 + 2^2)/2]r_0$	2.515	Vesta
$n=3; m=3$	$r_8 = [(3^2 + 3^2)/2]r_0$	3.483	Camilla
$n=4; m=4$	$r_9 = [(4^2 + 4^2)/2]r_0$	6.192	Jupiter
$n=5; m=5$	$r_{10} = [(5^2 + 5^2)/2]r_0$	9.675	Saturn
$n=6; m=6$	$r_{11} = [(6^2 + 6^2)/2]r_0$	13.932	Chiron
$n=7; m=7$	$r_{12} = [(7^2 + 7^2)/2]r_0$	18.963	Uranus
$n=8; m=8$	$r_{13} = [(8^2 + 8^2)/2]r_0$	24.768	Nessus, Hylonome
$n=9; m=9$	$r_{14} = [(9^2 + 9^2)/2]r_0$	31.347	Neptune
$n=10; m=10$	$r_{15} = [(10^2 + 10^2)/2]r_0$	38.700	Pluto
$n=11; m=11$	$r_{15} = [(11^2 + 11^2)/2]r_0$	46.827	Makemake
$n=12; m=12$	$r_{15} = [(12^2 + 12^2)/2]r_0$	55.728	2004 OJ14
$n=13; m=13$	$r_{15} = [(13^2 + 13^2)/2]r_0$	65.403	Eris

Considerações

O estado correspondendo ao inteiro $n = 8$ foi publicado em um primeiro trabalho teórico [1] como estado vazio, aproximadamente no mesmo período em que foram descobertos dois asteróides na posição prevista de 24.678UA, entre as órbitas de Urano e Netuno, denominados 1993HA2 (raio médio de 24.76UA) e 1995DW2 (raio médio de 24.17AU). Recentemente foram designados de Nessus e Hylonome, respectivamente.

A segunda e terceira leis de Kepler para as órbitas planetárias podem ser verificadas a partir das equações para os raios médios planetários e períodos de revolução determinados de conformidade com o modelo proposto.

De acordo com o modelo, a razão entre as velocidades orbitais é dada pelo inverso da razão entre os números inteiros que rotulam cada órbita, resultado este que Kepler já havia determinado.

O raio médio teórico para Júpiter (6.2 UA) difere aproximadamente de 19% do valor observado (5.2 UA). Este resultado pode ser atribuído ao fato que Júpiter contribui com aproximadamente 80% para a massa total planetária, ou seja, um forte efeito de atração gravitacional em relação aos outros corpos.

Ressalta-se o fato que o espectro de números m para os inteiros $n = 2$ e $n = 3$ surgem somente para os planetas e asteróides situados entre o sol e Júpiter.

Este modelo pressupõe um único estado vazio, encontrado para o par ($n = 1$; $m = 0$), o qual poderia corresponder à existência de corpos em órbita em torno do sol a cada 28 dias e a um raio médio de 0.18 U.

O modelo pôde prever as órbitas dos planetas anões Makemake e Eris, órbitas estas além da órbita de Plutão.

Conclusão

Os resultados teóricos apresentados para todos os raios médios dos corpos em órbita no sistema solar têm um único parâmetro de partida que é o raio médio da órbita do planeta Mercúrio e não dependem das massas destes corpos indicando bom acordo com as distâncias observadas pelos astrônomos tanto para os asteróides tanto para os planetas pesados tais como Netuno, Saturno e Urano e planetas anões como Makemake e Eris. Portanto, a idéia de Pitágoras sobre a harmonia das esferas celestiais parece estar igualmente presente na beleza da dança que realizam os elétrons em torno dos núcleos atômicos e, de modo magnífico, manifestando-se na existência das linhas espectrais características das radiações eletromagnéticas emitidas por cada átomo que caracteriza o conjunto de elementos encontrados na Natureza.

Poderia o conjunto de resultados acima apresentados estar associado à discretização ou quantização da geometria inerente à localização das órbitas planetárias?

2. Uma equação similar à de Schrödinger

Uma equação similar à de Schrödinger para um disco pode ser obtida empregando os conceitos da mecânica quântica para descrever o sistema solar situado em um plano envolvendo um campo atrativo situado no centro do sistema associado a um corpo de massa M [2-8]. Para um corpo de massa m orbitando em torno deste centro esta equação é dada em coordenadas polares por:

$$-\frac{(\hbar)^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) + V(r)\psi = E\psi$$

onde μ é massa reduzida dos corpos de massa M e m e $V(r)$ o potencial de interação gravitacional entre estes corpos.

Na equação acima, dado que o potencial V é uma função somente da variável radial r , podemos resolver a equação separando as variáveis nas suas partes radial e angular:

$$\psi(r, \theta) = f(r)\Theta(\theta)$$

Similarmente à resolução da equação de Schrödinger's para o caso atômico a equação apresentada tem soluções Ψ dependendo de números n e l os quais:

$$n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, n - \frac{1}{2}$$

Como para o cálculo das distâncias médias eletrônicas os raios médios planetários podem ser obtidos por:

$$\bar{r}_{nl} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (\psi_{nl}^* r \psi_{nl}) r dr d\theta$$

TABELA VI. Raios médios calculados a partir de uma equação similar a equação Schrödinger para soluções associadas aos “estados” $1/2 \leq n \leq 9/2$ e $l = 0, 1 \dots n-1/2$

Corpos celestes	Pares (n,l)	Raio médio calculado (UA)
Raio fundamental	$(1/2, 0)$	0.055
Mercúrio	$(3/2,0); (3/2, 1)$	0.387; 0.332
Vênus	$(5/2, 2)$	0.829
Terra	$(5/2, 0); (5/2, 1)$	1.050; 0.995
Marte	$(7/2, 3)$	1.548
Asteroides Hungaria	$(7/2, 0); (7/2, 1); (7/2, 2)$	2.046; 1.990; 1.824
Cinturão de asteroides principal	$(9/2, 0); (9/2, 1); (9/2, 2); (9/2, 3); (9/2, 4);$	3.372; 3.317; 3.151; 2.875; 2.488

Fonte: <http://www.johnstonsarchive.net/astro/>

TABELA VII. Raios médios calculados através das soluções de uma equação similar à equação de Schrödinger para funções associadas aos “estados” $11/2 \leq n \leq 27/2$ e $l = 0$

Corpos celestes	Picos de massa calculados $(n; l; r_n)$	Raio médio calculado(UA)	Raio observado (UA)
Júpiter, 2000 OZ21	$(11/2, 0; 5.031)$	5.031	5.203, 4.867
Hidalgo, 1998 WL34	$(11/2, 0; 5.031), (13/2, 0; 7.021)$	6.026	5.747, 5822
1998 HO121, 2000 VU2	$(13/2, 0; 7.021)$	7.021	7.135, 6892
Okyrhoe, 1999 LE31	$(13/2, 0; 7.021), (15/2, 0; 9.343)$	8.182	8.367, 8.133
Saturno 1999 RG33	$(15/2, 0; 9.343)$	9.343	9.539, 9.377
Echeclus, Thereus	$(15/2, 0; 9.343), (17/2, 0; 11.997)$	10.670	10.764, 10.638
Damocles, Elatus	$(17/2, 0; 11.997)$	11.997	11.843, 11.760

Chiron, 166P/NEAT	(17/2, 0; 11.997), (19/2, 0; 14.982)	13.489	13.710, 13.830
Chariklo, 1996 AR20	(19/2, 0; 14.982)	14.982	15.811, 15.197
Bienor, 1999 JV127	(19/2, 0; 14.882), (21/2, 0; 18.299)	16.640	16.519, 16.724
Urano, Asbolus	(21/2, 0; 18.299)	18.299	19.191, 18.080
Pholus, Pelion	(21/2, 0; 18.299), (23/2, 0; 21.948)	20.123	20.357, 20.053
1999 HD12, 2002 DH5	(23/2, 0; 21. 948)	21.948	21.322, 22.026
Dioresta, 1995 SN55	(23/2, 0; 21.948), (25/2, 0; 25.929)	25.929	25.131, 24.676
Hylonome, Nessus	(25/2, 0; 25.929)	23.934	23.948, 23.564
2002 CB249, 2002 FY36	(25/2, 0; 25.929), (27/2, 0; 30.241)	28.085	28.421, 28.969
Netuno, 2001 QR322	(27/2, 0; 30.241)	30.241	30.061, 30.302

Fonte: <http://www.johnstonsarchive.net/astro/>

TABELA VIII. Raios médios calculados através das soluções de uma equação similar à equação de Schrödinger para funções associadas aos estados $27/2 \leq n \leq 33/2$ e $l=0$

Corpos celestes	Picos de massa calculados ($n; l;$ r_m)	Raio médio calculado(UA)	Raio observado (UA)
Netuno, 2001 QR322	(27/2, 0; 30.241)	30.241	30.061, 30.302
1999 CP133, 2001 XH255	(29/2, 0; 34.885)	34.885	34.857, 34.810

Plutão, 90482 Orcus	(31/2, 0; 39.861)	39.861	39.529, 39.187
Haumea, Varuna	(31/2, 0; 39.861), (33/2, 0; 45.168)	42.515	43.136, 42.806
Makemake, Logos	(33/2, 0; 45.168)	45.168	45.428, 45.074

Fonte: <http://www.johnstonsarchive.net/astro/>

O conjunto de resultados apresentados nas **Tabelas VI, VII e VIII**, obtidos através das soluções de uma equação análoga à equação de Schrödinger, permitiu determinar:

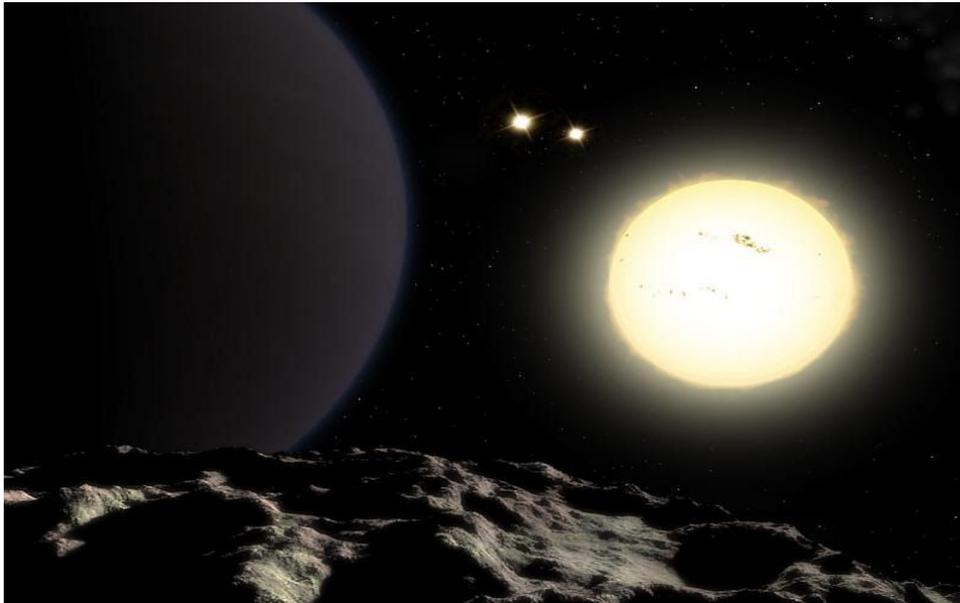
- o valor de um raio médio “fundamental” de 0.05UA , distância esta onde encontra-se um grande número de planetas “hot Júpiter” em sistemas extra-solares.
- raios médios planetários para todos os planetas Terrestres (Mercúrio, Vênus, Terra e Marte).
- raios médios planetários para todos os planetas Jovianos (Jupiter, Saturno, Urano e Netuno).
- raios médios planetários para os planetas anões – Plutão- e aqueles recentemente descobertos (Makemake, Haumea e Eris).
- raios médios para as principais regiões de probabilidade de encontrar corpos no Cinturão de Asteróides Hungarian e o Cinturão Principal de Asteróides.
- raios médios para todos os asteróides Centauros e a maioria dos corpos celestes trans-Netunianos.

3. Um modelo similar ao da mecânica quântica molecular aplicado a sistemas de estrelas binárias

3.1 O Sistema Extra-solar HD 188753 Cygni

HD 188753 é um sistema extra-solar único no qual um único planeta é encontrado orbitando em um sistema triplo de estrelas. O planeta um “hot Jupiter” gira em torno da estrela primária a uma distancia de 0.0446 UA (11.5% da distância entre Mercúrio

e o sol) O sistema binário de estrelas se encontra a uma distância média de separação entre elas de 0.66 UA e 12.3 UA da estrela primária.



O método variacional aplicado ao íon molecular H_2^+

A função de onda do sistema é escrita como uma combinação linear dos orbitais atômicos 1s do átomo de hidrogênio centrados nos prótons a e b :

$$\Psi = c_1\psi_{1sa} + c_2\psi_{2sb}$$

a energia do sistema dada por:

$$E = \frac{\int \Psi^* \hat{H} \Psi d\tau}{\int \Psi^* \Psi d\tau}$$

onde H é o operador hamiltoniano para o íon molecular:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} + V$$

Denotando

$$H_{aa} = H_{bb} = \int \psi_{1sa}^* \hat{H} \psi_{1sa} d\tau = \int \psi_{1sb}^* \hat{H} \psi_{1sb} d\tau$$

$$H_{ab} = H_{ba} = \int \psi_{1sa}^* \hat{H} \psi_{1sb} d\tau = \int \psi_{1sb}^* \hat{H} \psi_{1sa} d\tau$$

e

$$S = \int \psi_{1sa}^* \hat{H} \psi_{1sb} d\tau$$

e assim a expressão para a energia torna-se:

$$E = \frac{c_1^2 H_{aa} + 2c_1 c_2 H_{ab} + c_2^2 H_{bb}}{c_1^2 + 2c_1 c_2 S + c_2^2}$$

O mínimo de energia em relação à c_1 e c_2 é dado por:

$$\frac{\partial E}{\partial c_1} = 0 = c_1(H_{aa} - E) + c_2(H_{ab} - SE)$$

e

$$\frac{\partial E}{\partial c_2} = 0 = c_1(H_{ab} - SE) + c_2(H_{bb} - E)$$

A soluções não triviais são obtidas por:

$$\begin{vmatrix} H_{aa} - E & H_{ab} - SE \\ H_{ab} - SE & H_{bb} - E \end{vmatrix} = 0$$

As soluções para este determinante são:

$$E_S = \frac{H_{aa} + H_{ab}}{1 + S}$$

e

$$E_A = \frac{H_{aa} - H_{ab}}{1 - S}$$

Substituindo estes alto valores nas equações (5) e (6) estes podem ser resolvidos para a razão c_1/c_2 resultando:

$$c_1 / c_2 = \pm 1$$

Levando à solução simétrica e anti-simétrica da função de onda :

$$\Psi_S = c_1(\psi_{1sa} + \psi_{1sb})$$

$$\Psi_A = c_1(\psi_{1sa} - \psi_{1sb})$$

A constante c_1 pode ser obtida pela condição de normalização de Ψ_s e Ψ_a

$$\int \Psi_S^2 d\tau = 1 ; \int \Psi_A^2 d\tau = 1$$

ou

$$c_1^2 [\int \psi_{1sa}^2 d\tau \pm 2 \int \psi_{1sa} \psi_{1sb} d\tau + \int \psi_{1sb}^2 d\tau] = 1$$

ou

$$c_1^2 [1 \pm 2S + 1] = 1$$

Isto é :

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2 \pm 2S}}$$

As soluções são dadas por:

$$\Psi_S = \frac{1}{\sqrt{2+2S}}(\psi_{1Sa} + \psi_{1Sb})$$

e

$$\Psi_A = \frac{1}{\sqrt{2-2S}}(\psi_{1Sa} - \psi_{1Sb})$$

Parte do operador Hamiltoniano é o mesmo para o átomo de hidrogênio:

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2m}\nabla^2\psi_{1Sa} - \frac{e^2}{r_a}\psi_{1Sa} = E_H\psi_{1Sa}$$

resultando

$$H_{aa} = \int \psi_{1Sa} \left(E_H - \frac{e^2}{r_b} + \frac{e^2}{r_{ab}} \right) \psi_{1Sa} d\tau = E_H + J + \frac{e^2}{a_0D}$$

J denota a integral:

$$J = \int \psi_{1Sa} \left(\frac{-e^2}{r_b} \right) \psi_{1Sa} d\tau = \frac{e^2}{a_0} \left[-\frac{1}{D} + e^{-2D} \left(1 + \frac{1}{D} \right) \right]$$

onde $D = rab/ao$; ao representa o raio de Bohr. De modo similar,

$$\begin{aligned} H_{ab} &= \int \psi_{1Sb} \left(E_H - \frac{e^2}{r_b} + \frac{e^2}{r_{ab}} \right) \psi_{1Sa} d\tau = SE_H + K + \frac{Se^2}{a_0D} \\ &= SE_H + K + \frac{Se^2}{a_0D} \end{aligned}$$

onde

$$S = e^{-D} \left(1 + D + \frac{D^2}{3} \right)$$

e

$$K = \int \psi_{1s_b} \left(\frac{-e^2}{r_b} \right) \psi_{1s_a} d\tau = \frac{-e^2}{a_0} e^{-D} (1+D)$$

As energias são então dadas pelas seguintes expressões:

$$E_s = E_H + \frac{e^2}{a_0 D} + \frac{J+K}{1+S}$$

e

$$E_A = E_H + \frac{e^2}{a_0 D} + \frac{J-K}{1-S}$$

A energia de estabilização é dada pela solução simétrica ES da equação de Schrödinger.

Denotando:

$$J' = -\frac{1}{D} + e^{-2D} \left(1 + \frac{1}{D} \right)$$

e

$$K' = -e^{-D} (1+D)$$

a expressão para E_s torna-se:

$$E_s = E_H + \frac{e^2}{a_0} \left(\frac{1}{D} + \frac{J'+K'}{1+S} \right)$$

Definindo $E(r)$ como:

$$E(r) = \frac{1}{D} + \frac{J'+K'}{1+S}$$

assim

$$E_s = E_H + \frac{e^2}{a_0} E(r)$$

O mínimo de energia é dado pela distância de equilíbrio entre os dois prótons,

O método variacional permite obter uma energia de dissociação de 1.77 eV para o íon molecular H_2^+ à uma distância de equilíbrio de 1.32Å. O valor exato é 2.78 eV para uma distância de equilíbrio de 1.06Å.

No caso das estrelas binárias do sistema HD 188753 Cygni se tomarmos os seguintes valores para $r_{ab} = 0.5$ UA; 0.75 UA; 1.0 UA; 1.25 UA e 1.5 UA.

Os resultados indicam um valor cerca de 1.0 UA para a “distância de equilíbrio” próximo assim ao valor observado de 0.66 UA [7].

r_{ab}	D	J	K	S	E_s
0,5	1,2920	-0,6401	-0,6297	0,7825	-0,0616
0,75	1,9380	-0,4846	-0,4230	0,6033	-0,050
1,0	2,5840	-0,3726	-0,2705	0,4385	-0,060
1,25	3,2299	-0,3076	-0,1673	0,3049	-0,0543
1,5	3,8760	-0,2575	-0,1011	0,2049	-0,0396

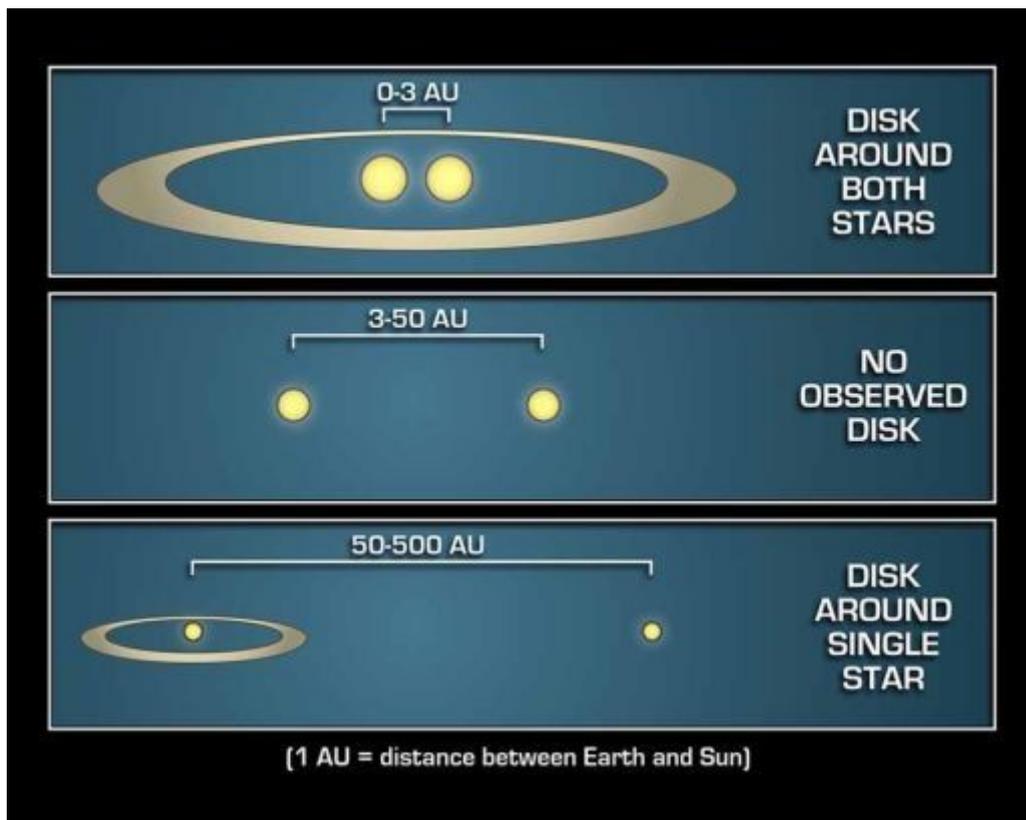
3.2 Geometrias de formação de discos protoplanetários em torno de sistemas binários de estrelas

Curiosamente, uma recente pesquisa de observação teve como objetivo investigar a geometria de formação de discos proto-planetários em relação às distâncias de separação de sistemas binários de estrelas (*Trilling, D. E. et al. (2007). Debris disks in main-sequence binary systems. Astrophys. J. 658, 1289-1311*). Ao estudar a distribuição espectral de energia e temperaturas típicas (na faixa de 100-200 K) de discos de poeira em torno de 69 sistemas estelares binários, os resultados apontaram que em alguns sistemas as dimensões dos discos de poeira eram muito maiores do que a distância de separação entre as estrelas implicando na existência de discos de detritos circum binários com distâncias típicas de separação menores do que 3.0 UA. Em contrapartida, em outros sistemas binários foram observadas distâncias de poeira muito menores do que a distância de separação entre as estrelas indicando a existência de discos de poeira circum estelares com distâncias típicas de separação maiores do que 50.0 UA. Nos sistemas restantes estudados as dimensões dos discos

protoplanetários eram semelhantes às distâncias de separações entre as estrelas binárias indicando instabilidade nas localizações destes discos.

Ao que parece, há claras semelhanças entre os aspectos da ligação química obtidos pela mecânica quântica molecular aplicada ao sistema H_2^+ e as características gerais da geometria de formação de discos protoplanetários em torno de sistemas de estrelas binárias, particularmente aqueles relacionados com a distância de separação entre as estrelas. Assim, os discos de detritos circum binários observados a pequenas distâncias de separação de menos de 3.0 UA podem ser considerados análogos à formação da nuvem eletrônica em torno dos dois núcleos e próximas da distância de equilíbrio para o sistema íon molecular H_2^+ . De modo correspondente, os discos de detritos circum estelares observados para as separações binárias maiores do que 50.0 UA são semelhantes aos aspectos físicos associados ao processo de dissociação do íon molecular H_2^+ resultando na formação de um átomo de hidrogênio e um próton. Além disso, os sistemas binários de estrelas que não apresentam discos de detritos sejam circum binários ou circum estelares exibem geometria análoga a de uma nuvem eletrônica instável. Este arranjo é então surpreendentemente análogo ao encontrado quando os dois núcleos da espécie H_2^+ afastam-se da distância de equilíbrio deste íon molecular.

Embora o modelo proposto não leva em conta o potencial gravitacional de atração entre as estrelas binárias parece que o quadro matemático teórico que descreve a geometria de formação dos discos protoplanetários nestes sistemas pode ser análogo ao empregado para obter as funções de distribuição eletrônica para o íon molecular H_2^+ na sua estrutura estável como também na sua forma dissociada.



[http://www.nasaimages.org/luna/servlet/detail/nasaNAS~12~12~67363~172144:Where-Planets-Take-Up-Residence.](http://www.nasaimages.org/luna/servlet/detail/nasaNAS~12~12~67363~172144:Where-Planets-Take-Up-Residence)